Fonctions II
Représentation graphique

Les réponses des exercices sont téléchargeables sur le site
MathEnSeconde.fr
Veuillez penser à apporter la calculatrice à chaque cours.

I- Définition

Exercice 1

$$f: \quad \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x^2 + x + 1$$

Tracer point par point la représentation graphique (ou « courbe représentative ») de la fonction *f* dans un repère orthonormé (en prenant 2cm pour unité).

Exercice 2

$$g: \quad \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{x^2}{2(x-1)}$$

Tracer point par point la représentation graphique (ou « courbe représentative ») de la fonction *g* dans un repère orthonormé (en prenant 2cm pour unité).
Lorsque x varie sur $]1;4]$, quelle semble être la valeur minimale de $g(x)$?
(Et la valeur maximale ?)

Exercice 3

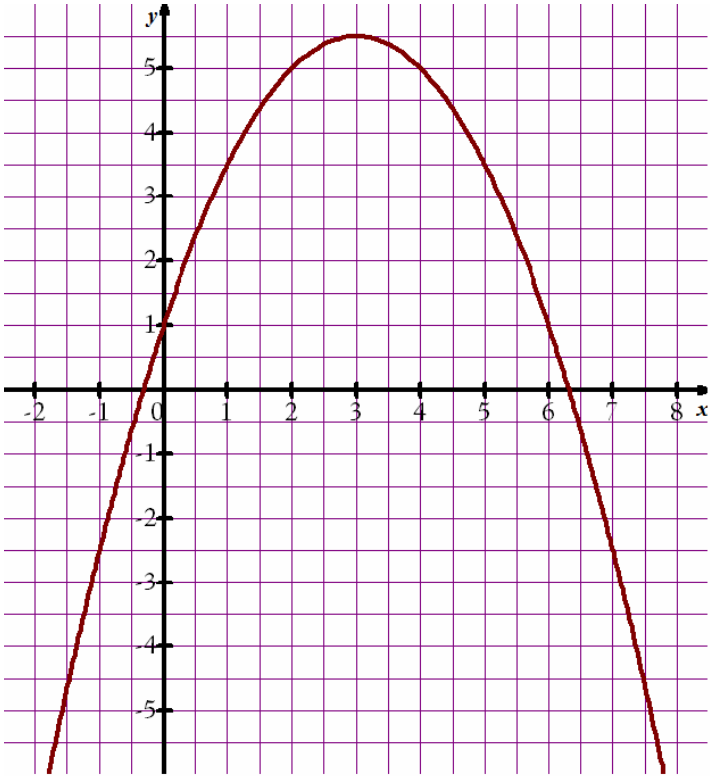
$$f: \quad \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto 2x - 1$$

Tracer (le dessin de) la représentation graphique de *f* dans un repère orthonormé donné.

Exercice 4

Tracer (le dessin de) la représentation graphique de la fonction *valeur absolue* (la fonction qui prend la valeur absolue d'un nombre) dans un repère orthonormé (en prenant 2cm pour unité).

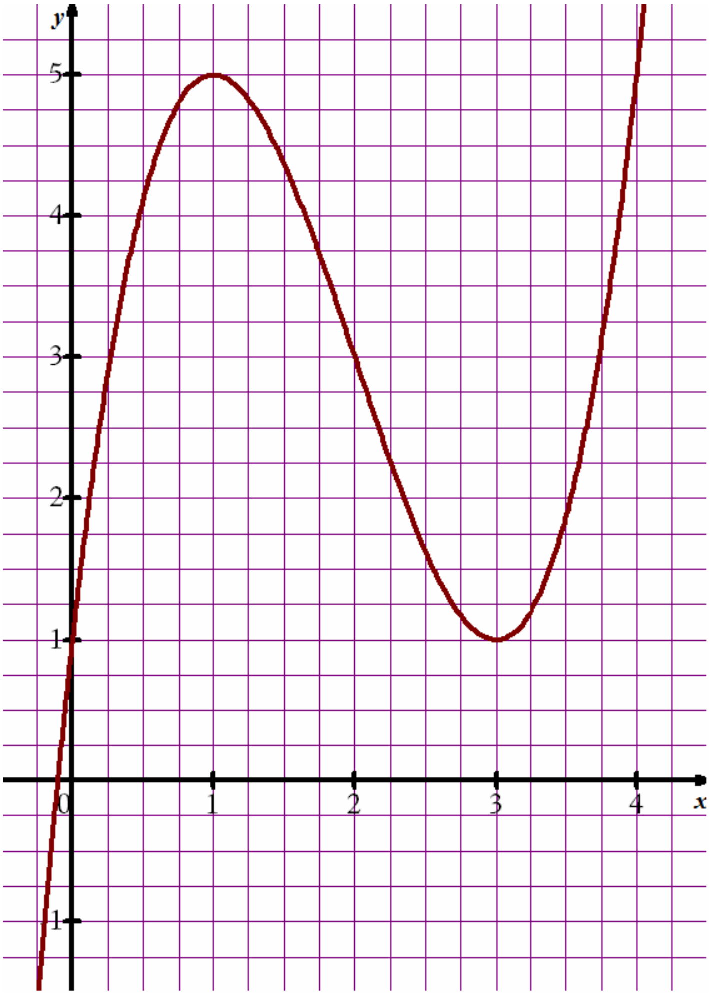
Exercice 5



A partir de ce dessin d'une parabole, qui est la courbe représentative d'une fonction *f*, donner des réponses *éventuellement approximatives* aux questions suivantes :

a) Donner les valeurs de : $f(2)$, $f(1)$, $f(0)$, $f(-1)$.
b) Quels sont les antécédents de 5 et de 1, par *f* ?
c) Quelle est la valeur maximale prise par $f(x)$ lorsque x varie continûment de 0 à 6 ?
d) Quelle est la valeur minimale prise par $f(x)$ lorsque x varie continûment de 0 à 6 ?
e) Quel est l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \leq 5$?

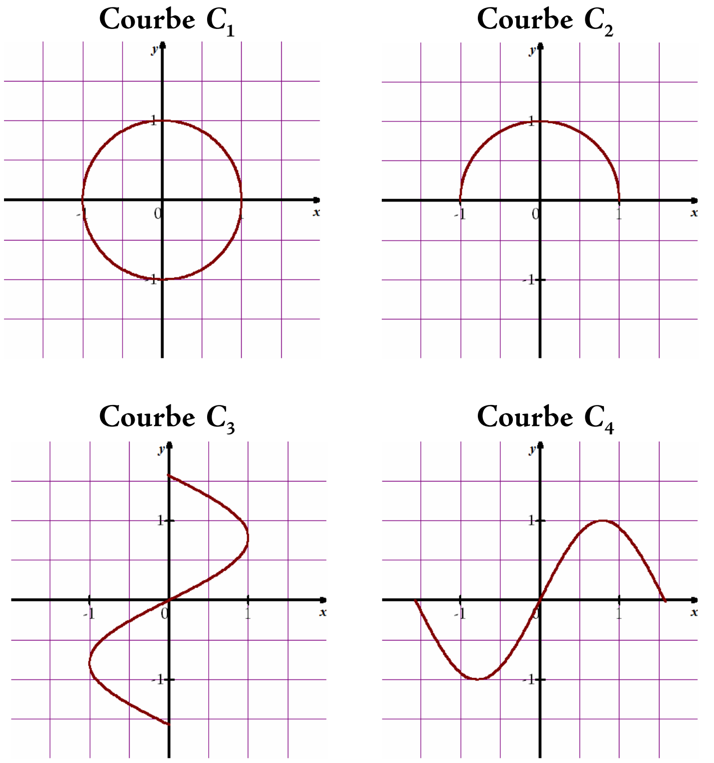
Exercice 6



A partir de ce dessin de la courbe représentative de la fonction g, donner des réponses *éventuellement approximatives* aux questions suivantes :

a) Donner la valeurs de $g(1)$ et de $g(0)$.
b) Quels sont les antécédents de 3 par g ?
c) Donner un nombre qui a exactement deux antécédents par g.
d) Lorsque x varie continûment de 2 à 4, quelle est la valeur minimale de $g(x)$? Et quelle est sa valeur maximale ?
e) Arrive-t-il qu'un nombre strictement négatif ait, par g, une image strictement positive ? Si oui donner un exemple, si non, dire pourquoi.
f) Quel semble être l'ensemble des solutions de l'inéquation : $g(x) \geq 1$?

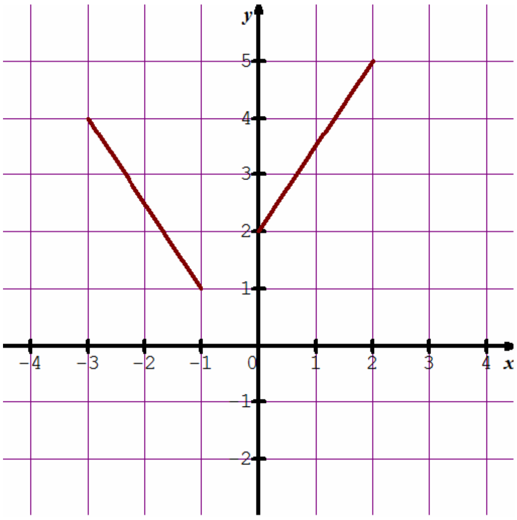
Exercice 7



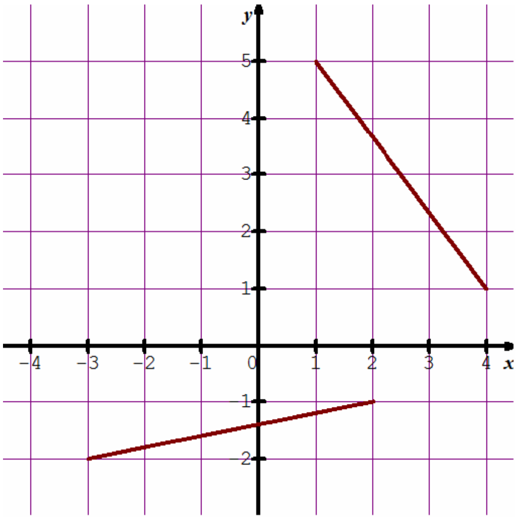
Parmi ces quatre courbes, quelles sont celles qui ne peuvent pas être une représentation graphique de fonction ? (C_2 est un demi-cercle dont les extrémités sont sur l'axe des abscisses.)

Exercice 8

a) L'axe des abscisses peut-il être la représentation graphique d'une fonction ? Si oui, exprimer la fonction en question.
b) L'axe des ordonnées peut-il être la représentation graphique d'une fonction ? Si oui, exprimer la fonction en question.
c) La figure formée par la <u>réunion</u> (ensembliste) des deux segments ci-dessous peut-elle être la représentation graphique d'une fonction ? Si oui, quel est son ensemble de définition ?



d) La figure formée par la réunion des deux segments ci-dessous peut-elle être la représentation graphique d'une fonction ? Si oui, quel est son ensemble de définition ?



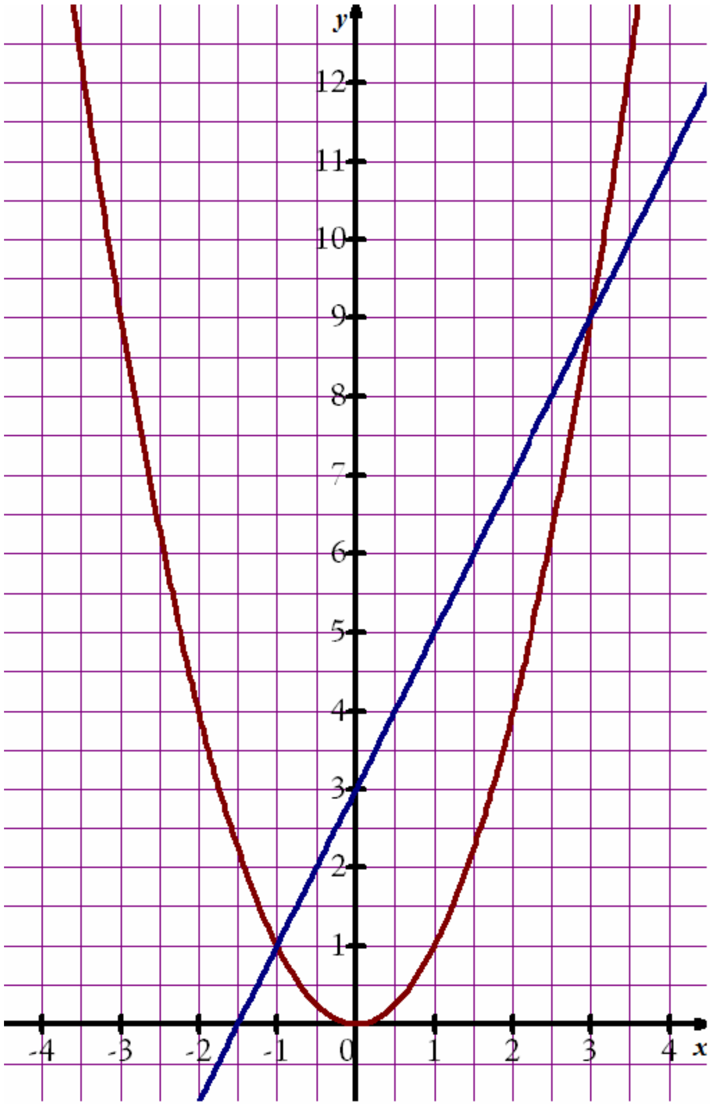
II- Égalités, inégalités

Exercice 9

On donne ici les représentations graphiques des deux fonctions suivantes :

$f : x \mapsto x^2$

$g : x \mapsto 2x+3$



1- Par une lecture graphique, essayer de donner l'ensemble des solutions des équations ou inéquations suivantes :

a) $x^2 \geq 9$

b) $2x+3=4$

c) $2x+3 \leq 5$

d) $x^2 = 2x+3$

e) $x^2 \leq 2x+3$

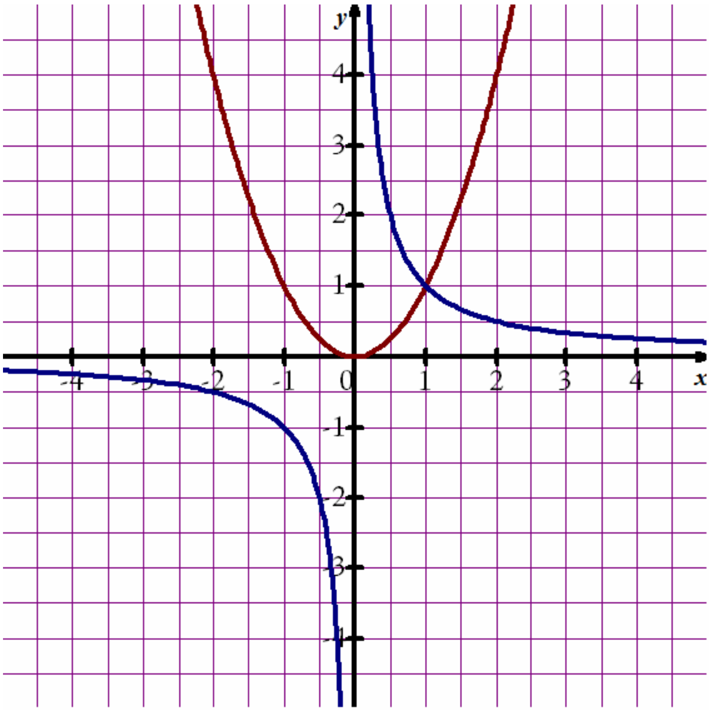
2- Vérifier vos réponses à chacune des questions précédentes en résolvant les équations et inéquations.

Exercice 10

On donne ici les représentations graphiques des deux fonctions suivantes :

$f : x \mapsto x^2$

$g : x \mapsto \dfrac{1}{x}$



1- Par une lecture graphique, essayer de donner l'ensemble des solutions des équations ou inéquations suivantes :

a) $\dfrac{1}{x} \geq 1$ b) $\dfrac{1}{x} = x^2$ c) $\dfrac{1}{x} \leq x^2$

2- Vérifier la réponse donnée à la question a) en résolvant l'inéquation.

III- Calculatrice graphique

Exercice 11

$f : x \mapsto \dfrac{x^2+10}{x+2}$

1- Donner le domaine de définition de *f*.

2- En faisant tracer la courbe de cette fonction par votre calculatrice et en choisissant convenablement les paramètres d'affichage, donner une réponse (forcément approximative) aux questions suivantes :

a) Quelle semble être la valeur minimale de $f(x)$ lorsque x varie sur $]-2;5[$?

b) Quelle semble être la valeur maximale de $f(x)$ lorsque x varie sur $]-2;5[$?

c) Quel semble être l'ensemble des antécédents de 5, par *f* ?

d) Et l'ensemble des antécédents de 3 ?

e) Quel est l'ensemble des nombres qui n'admettent pas d'antécédent par *f* ?

f) Quel semble être l'ensemble des solutions de l'inéquation $\dfrac{x^2+10}{x+2} \leq 5$?

3- Vérifier par le calcul vos réponses aux questions c) et f)

Exercice 12

Soit *h* la fonction définie par :

Pour tout x réel : $h(x) = \dfrac{3}{2}x^4 - \dfrac{1}{4}x^3 - 3x^2 + \dfrac{3}{4}x + 1$

Donner le domaine de définition de *h*.

En faisant tracer la courbe de cette fonction par votre calculatrice et en choisissant convenablement les paramètres d'affichage, donner une réponse (forcément approximative) aux questions suivantes :

a) Quelle semble être la valeur minimale de $h(x)$ lorsque x varie sur $\left[-\dfrac{3}{2};\dfrac{3}{2}\right]$?

b) Quelle semble être la valeur maximale de $h(x)$ lorsque x varie sur $\left[-\dfrac{3}{2};\dfrac{3}{2}\right]$?

c) Quels semblent être les antécédents de 0, par *h* ?

d) Quels sont les deux nombres qui semblent avoir exactement trois antécédents par *h* ?

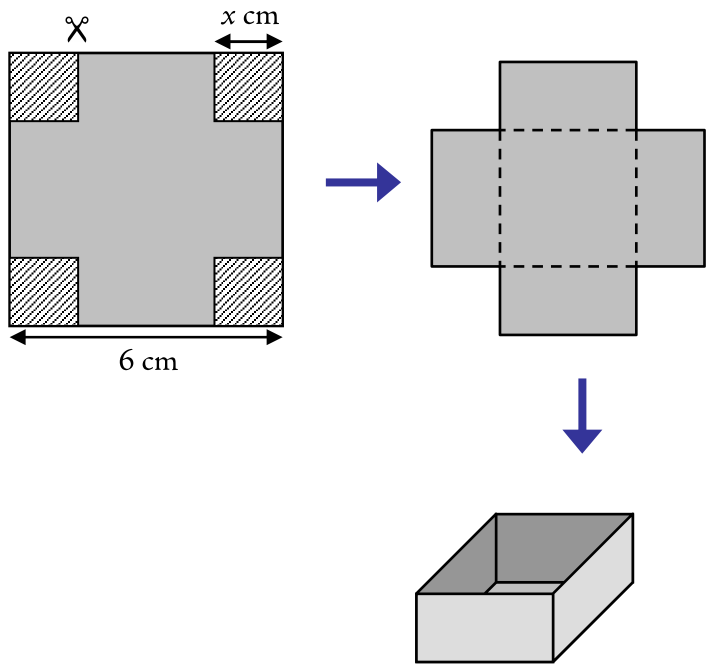
e) Quel semble être l'ensemble des solutions de l'inéquation $\dfrac{3}{2}x^4 - \dfrac{1}{4}x^3 - 3x^2 + \dfrac{3}{4}x + 1 > 0$?

Exercice 13

En utilisant votre calculatrice graphique et en choisissant convenablement les paramètres d'affichage, donner (sans justification) une réponse éventuellement approximative à la question suivante : quel est l'ensemble des nombres qui admettent exactement deux antécédents, par la fonction $x \mapsto 2x^3 - 3x^2 - 12x$?

Exercice 14

A partir d'une feuille cartonnée carrée de 6cm de côté, on fabrique une boite (sans couvercle), en ôtant quatre carrés identiques de côté x cm, comme indiqué sur le dessin suivant :



Remarquons que x peut varier sur l'intervalle $]0;3[$.

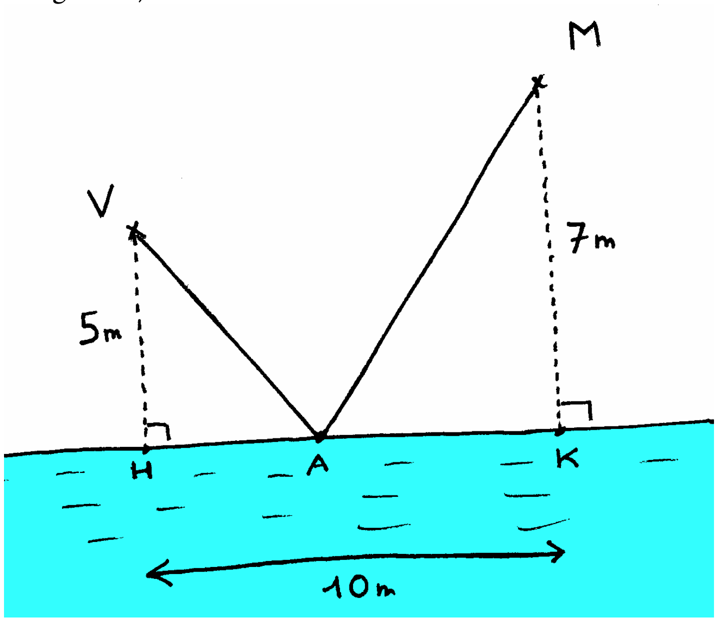
a) On note $V(x)$ le volume de la boite (sa contenance) en cm^3. Exprimer $V(x)$ en fonction de la seule variable x. On mettra $V(x)$ sous la forme $k(x^3-6x^2+9x)$, où k est une constante positive.

b) En traçant la courbe de la fonction V sur votre calculatrice graphique, déterminez la valeur de x pour laquelle le volume de la boite est maximal et indiquez quel est alors ce volume. Bien entendu, la réponse à cette question, qui n'est pas une question véritablement mathématique, sera peut-être approximative.

Exercice 15

Problème de la vache paresseuse.

Considérons une vache paissant non loin d'une rivière. Cette vache a très soif et un peu faim. Elle fait le projet d'aller s'abreuver au bord de la rivière puis d'aller brouter une marguerite qu'elle a aperçue dans l'herbe. Les différents éléments de ce problème sont situés comme indiqué sur le schéma suivant (V : position de la vache et M position de la marguerite).



Le point A représente l'endroit où la vache va aller s'abreuver. La vache étant paresseuse, elle cherche à minimiser la longueur de son parcours et vous demande de vous occuper du problème.
La vache se doute qu'elle devra aller en ligne droite de V à A, puis de A à M, mais elle veut savoir où placer le point A exactement.
La vache pose $x = HA$.
La vache vous demande d'exprimer la longueur $L(x)$ du parcours total envisagé en fonction de x, puis de tracer la courbe de la fonction L sur votre calculatrice graphique, de façon à avoir une bonne estimation de la valeur de x pour laquelle le parcours est minimal.

La vache n'est pas satisfaite de la précision obtenue. Estimant que l'étude des variations de L est hors de portée d'un élève de seconde, elle change son fusil d'épaule et contre toute attente, vous invite à résoudre le problème par la géométrie. Devant votre désarroi, elle vous suggère de considérer le symétrique M' de M par rapport à la droite (HK), vous signale que la construction de la position optimale de A est accessible à un élève de sixième et que le calcul de x (de la valeur de x pour laquelle le trajet de la vache est minimal) ne dépasse pas le niveau de troisième. Sur ce, elle attend goguenarde votre réponse.

Intersections

Exercice 16

On pose : $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ et $g : x \mapsto x+2$.

Dans un repère donné, on note Γ_f la courbe représentative de f et Γ_g la courbe représentative de g.

Déterminer les coordonnées des points d'intersection de Γ_f et Γ_g.

Exercice 17

On pose : $f : x \mapsto x^2$ et $g : x \mapsto 2x$.

Dans un repère donné , on note Γ_f la courbe représentative de f et Γ_g la courbe représentative de g.

Déterminer les coordonnées des points d'intersection de Γ_f et Γ_g.

Exercice 18

On pose : $f : x \mapsto x^2$ et $g : x \mapsto \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$.

Dans un repère donné , on note Γ_f la courbe représentative de f et Γ_g la courbe représentative de g.

Déterminer les coordonnées des points d'intersection de Γ_f et Γ_g.

Exercice 19

On pose : $f : x \mapsto x^2 - 5$

Soit $\mathcal{C}$ la courbe de f dans un repère donné.

Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}$ avec les axes du repère.

Exercice 20

Considérons la fonction $f : x \mapsto \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$.

Notons Γ la courbe de la fonction f dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ donné. On pose également : $A(4;3)$. Quels sont les coordonnées des points d'intersection de Γ avec la droite (OA) ?

IV- Symétries

Exercice 21

Démontrer que la courbe de f dans un repère orthogonal donné, admet un axe de symétrie d'équation $x = k$ (où k est une constante). *On n'utilisera pas le théorème concernant les fonctions polynômes du second degré.*

a) $f : x \mapsto x^4 + x^2 + 1$

b) $f : x \mapsto x^2 - x$ ($k = \frac{1}{2}$)

c) $f : x \mapsto \frac{1}{x} - \frac{1}{x-2}$

Exercice 22

Dans chaque cas, démontrer que Γ, la courbe de f dans un repère donné, admet un centre de symétrie $\Omega(x_0 ; y_0)$.

a) $f : x \mapsto x^3 + x$

b) $f : x \mapsto \frac{x+1}{x-2}$ ($x_0 = 2$)

c) $f : x \mapsto \frac{1}{x} + \frac{1}{x-2}$

Exercice 23

On pose : $f : x \mapsto x^2 - 2x$

Démontrer que Γ, la courbe de f dans un repère orthogonal donné, admet la droite d'équation $x = 1$ pour axe de symétrie.

Exercice 24

On pose : $f : x \mapsto x^3 - 3x^2$

Démontrer que Γ, la courbe de f dans un repère donné, admet un centre de symétrie d'abscisse 1 et dont on précisera l'ordonnée.

V- Approfondissements

On rappelle qu'une fonction polynôme de degré 2 est une fonction qui peut s'écrire sous la forme $x \mapsto ax^2 + bx + c$, où a, b et c sont trois constantes, avec $a \neq 0$.

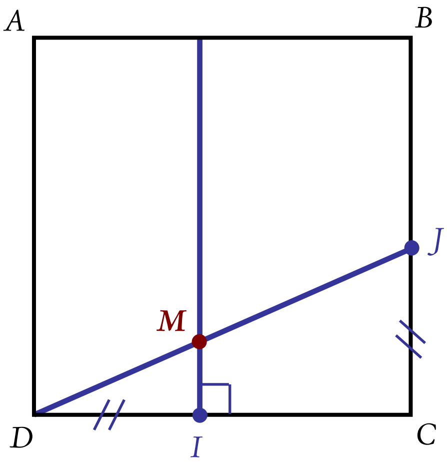
Exercice 25

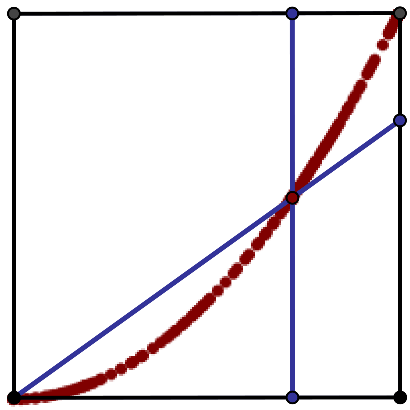
Dans un repère orthonormé, on pose : $F(0;1)$. Notons d la droite d'équation $y = -1$. Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des points équidistants du point F et de la droite d.

a) Déterminer une équation de $\mathcal{P}$.
b) Déterminer une expression de la fonction dont $\mathcal{P}$ est la courbe représentative. (Faire ensuire tracer la courbe par la calculatrice.)

Exercice 26

On admet ici que la représentation graphique d'une fonction polynôme de degré 2 est toujours une parabole.





Soit $ABCD$ un carré. Soient I un point de $[DC]$ (distinct de d) et J un point de $[BC]$ tels que $DI = CJ$. Soit M le point d'intersection de (DJ) avec la perpendiculaire à $[DC]$ passant par I. Démontrer que, lorsque I varie sur $[DC]$, M se déplace sur une parabole.

Aide : on pourra noter a le côté du carré (ou prendre ce côté pour unité de longueur), puis, en notant $(x;y)$ les coordonnées de M dans le repère $\left(D;\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DA}\right)$, exprimer y en fonction de x.

Exercice 27

Déterminer une expression de la fonction polynôme de degré 2 dont la représentation graphique passe par les points $A(0;0)$, $B(1;2)$ et $C(2;1)$.

Exercice 28

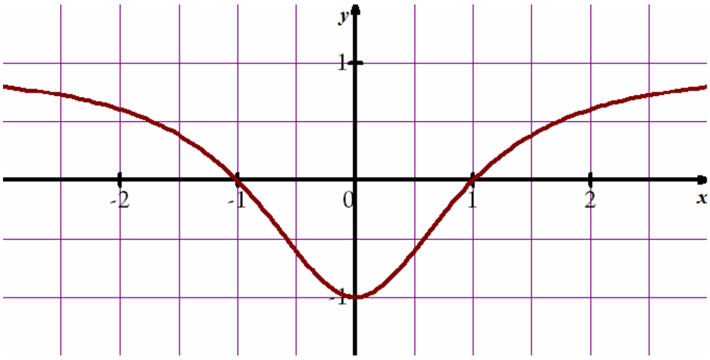
Dans un repère orthonormé donné d'origine O, on pose : $A(2;0)$. On considère le demi-cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[OA]$ situé au dessus de l'axe des abscisses.

Déterminer une expression de la fonction dont $\mathcal{C}$ est la représentation graphique.

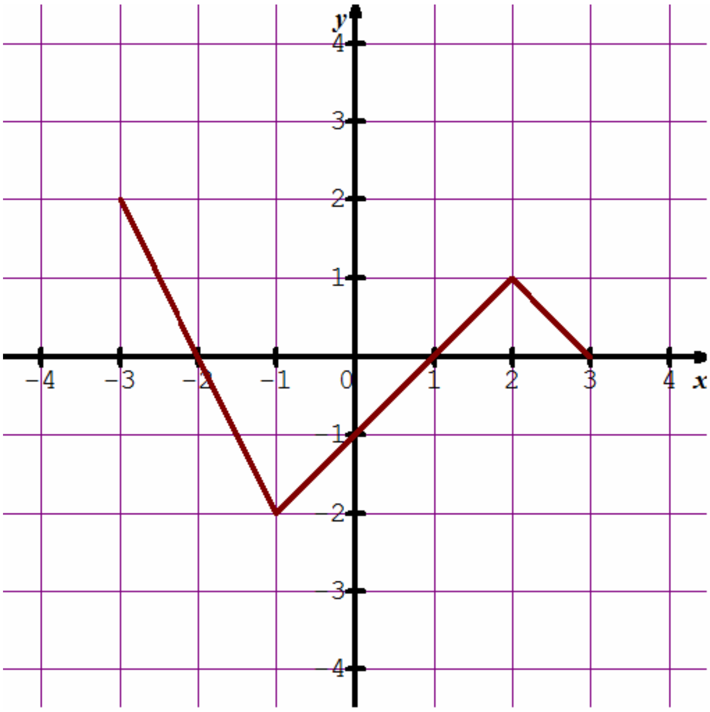
Exercice 29

On a représenté ci-dessous la courbe d'une fonction f. Il est demandé de colorier (ou hachurer) l'ensemble des points $M(x;y)$ vérifiant la condition suivante :

$$\begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ \left(0 \leq y \leq f(x)\right) \text{ ou } \left(f(x) \leq y \leq 0\right) \end{cases}$$



Exercice 30



Voici la représentation graphique d'une fonction, notée *f*, définie sur $[-3;3]$.
On pose alors :

$g : x \mapsto f(x)+1$

$h : x \mapsto \dfrac{1}{2} f(x)$

$i : x \mapsto -f(x)$

$j : x \mapsto |f(x)|$

$k : x \mapsto f(x-1)$

Dessiner alors les représentations graphiques des fonctions *g*, *h*, *i*, *j* et *k*. (Sur des dessins différents de façon que ce soit lisible.)